

APPUNTI FONDAMENTALI DI ANALISI I

di Fabrizio Ciacchi – fabrizio@ciacchi.it – <http://www.ciacchi.it>

Il concetto di insieme e le principali operazioni con gli insiemi

CONCETTO DI INSIEME: Un'insieme è un gruppo di elementi che soddisfano una determinata proprietà P.

$$A = \{x \mid x \text{ soddisfa } P\} \quad A = \{x \in X \mid p(x)\}$$

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI: Dati $A = \{x \mid p(x)\}$ e $B = \{x \mid q(x)\}$

$$A \cup B = \{x \mid p(x) \vee q(x)\}$$

$$A \cap B = \{x \mid p(x) \wedge q(x)\}$$

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid p(x) \wedge q(x)\}$$

$$A \subseteq B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

PROPRIETÀ DEGLI INSIEMI:

a) idempotenza: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

b) commutativa: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

d) associativa: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

e) distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e) assorbimento: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$

f) leggi di De Morgan: $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$; $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

PARTI DEGLI INSIEMI DI A:

$$P(A) = \{x \mid x \hat{=} A\} \quad \text{insieme delle parti}$$

$$n. \text{ sottoinsiemi di } A: |A| = n \text{ (per } A \text{ finito) ottengo che } |P(A)| = 2^n$$

PRODOTTO CARTESIANO:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \hat{=} X \text{ \& } y \hat{=} Y\}$$

(x, y) vengono chiamate coppie ordinate

Il concetto di funzione e le nozioni di funzione iniettiva, surgettiva, biiettiva e invertibile

CONCETTO DI FUNZIONE: funzione f : una legge che associa ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{oppure} \quad X \xrightarrow{(f)} Y$$

PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE FUNZIONI:

a) surgettiva: Se ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A . ($|A| \geq |B|$)

$$\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b$$

b) iniettiva: Se elementi distinti di A hanno per immagine elementi distinti di B . ($|A| \leq |B|$)

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

c) bigettiva: Quando è sia iniettiva sia surgettiva; in questo caso f è una bigezione. ($|A| = |B|$)

d) funzione identica: Quella funzione che ad ogni elemento di A associa se stesso e si indica con I (oppure i).

$$I: x \rightarrow x; \quad x \in X$$

- e) applicazione inversa: Se $f: A \rightarrow B$ è una bigezione esiste, univocamente determinata, un'applicazione $g: B \rightarrow A$ tale che $g \circ f = I_a$ e $f \circ g = I_b$. Tale applicazione si dice l'inversa di f e si indica con f^{-1} .
- f) funzione crescente: f è crescente strettamente in A , o soltanto crescente, se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in A \mid x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- g) funzione decrescente: f è decrescente strettamente in A , o soltanto decrescente, se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in A \mid x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
- h) funzione non-decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A \mid x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- i) funzione non-crescente: $\forall x_1, x_2 \in A \mid x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- j) funzione monotona: Quando una funzione è crescente, decrescente, non-decrescente o non-crescente.
- k) funzione pari: $f(x) = f(-x)$ ottengo una funzione simmetrica rispetto all'asse Y .
- l) funzione dispari: $f(x) = -f(-x)$ ottengo una funzione simmetrica rispetto all'origine O .

Il concetto di proposizione e di predicato; uso dei quantificatori

SIMBOLOGIA DEI CONNETTIVI:

- ◆ congiunzione “e” $\rightarrow \&, \wedge$
- ◆ congiunzione “o” $\rightarrow \vee$ (“vel” latino)
- ◆ se...allora $\rightarrow \Rightarrow$
- ◆ se e solo se $\rightarrow \Leftrightarrow$
- ◆ negazione $\rightarrow \neg$

TABELLA DI LOGICA:

P	Q	P&Q	PVQ	P \Rightarrow Q	P \Leftrightarrow Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

REGOLE DEDOTTE:

- ◆ $P \Rightarrow Q \rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$
- ◆ $\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg P \& \neg Q$
- ◆ $\neg(P \& Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q$

I PREDICATI:

Si può chiamare predicato $P(x)$ una proprietà riguardante una o più variabili che utilizzano relazioni binarie (es. $x < y$) o unarie ($x > 8$) espresse con relazioni insiemistiche [=, \in , \subset , \subseteq , \cup , \supseteq] o con relazioni numeriche [=, $<$, \leq , $>$, \geq].

REGOLE PER COSTRUIRE NUOVI PREDICATI:

- ◆ la possibilità di sostituire un numero con una variabile o viceversa, in modo da passare da predicati unari a predicati binari.
- ◆ utilizzare i connettivi logici ($\&$, \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow , \neg) per legare due o più connettivi logici.
- ◆ l'applicazione dei quantificatori
 - quantificatore universale: \forall , “per ogni”
 - quantificatore esistenziale: \exists , “esiste” ($\exists!$, “esiste un unico”)
- ◆ negazione di un proposizione: $\neg \forall x = \exists x$ e negare i quantificatori [$\neg \forall = \exists$; $\neg \exists = \forall$]

Numeri naturali, interi, razionali e reali; irrazionalità della radice di 2 (*)

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ numeri naturali
negativi

non posso considerare numeri

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ numeri interi
in parti uguali

non posso dividere un elemento

$Q = \{p/q \mid p \in Z, q \in Z - \{0\}\}$ numeri razionali (ratio = rapporto)

ma $\sqrt{2}$ è un numero non razionale

$R = \{Q + \text{irrazionali (es. } e, \pi)\}$ numeri reali

da ciò posso dedurre che $N \subseteq$

$Z \subseteq Q \subseteq R$

Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Si può dimostrare che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale procedendo per assurdo.

Poniamo $\sqrt{2} \in Q$, quindi $\sqrt{2}$ è scrivibile come

$\sqrt{2} = p/q$, per avere una soluzione razionale elevo al quadrato

$\sqrt{2}^2 = p^2/q^2 \Rightarrow 2q^2 = p^2$, a questo punto posso notare che p è un numero pari e q deve essere un numero dispari

$p = 2k \Rightarrow p^2 = 4k^2$, da ciò sostituisco nell'equazione precedente e ottengo

$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$, a questo punto noto che anche q è un numero pari e quindi **arrivo ad una contraddizione**

Per assurdo è stato dimostrato quindi che $\sqrt{2} \notin Q$

Assiomi dei reali

(i) Una operazione “+” detta somma.

(ii) Una operazione “•” detta prodotto.

(iii) Una relazione binaria “ \leq ” detta relazione d'ordine.

• Proprietà della Somma:

S1= proprietà commutativa: $\forall x, y \in R ; x + y = y + x$

S2= proprietà associativa: $\forall x, y, z \in R ; (x + y) + z = x + (y + z)$

S3= esistenza dell'elemento neutro: $\exists e \in R, \forall x \in R ; x + e = x$ ($e = 0$)

S4= esistenza dell'elemento inverso: $\forall x \in R, \exists y \in R ; x + y = 0$ (“ $y = -x$ ” ed è chiamato opposto di x)

• Proprietà del Prodotto:

P1= proprietà commutativa: $\forall x, y \in R ; x \cdot y = y \cdot x$

P3= esistenza dell'elemento neutro: $\exists e \in R, \forall x \in R ; x \cdot e = x$ ($e = 1$)

P4= esistenza dell'elemento inverso: $\forall x \in R - \{0\}, \exists y \in R ; x \cdot y = 1$
 (“ $y = 1/x$ ” ed è chiamato inverso di x)

• Proprietà derivate dalla somma e dal prodotto

PS= proprietà distributiva: $\forall x, y, z \in R ; x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

- OSSERVAZIONE:** Un qualunque insieme F che soddisfa le proprietà (S), (P) e (PS) si dice campo; dunque i reali sono un campo, ma non sono l'unico; per esempio anche i razionali formano un campo.

- Proprietà dell'ordinamento:

O1= proprietà transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} ; x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O2= proprietà tricotomica: $\forall x, y \in \mathbb{R} ; x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y$

O3= proprietà di ordinamento totale: $\forall x, y \in \mathbb{R} ; x \leq y \vee y \leq x$

- Proprietà derivate dal campo e dall'ordinamento:

OS= monotonia della somma: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} ; x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z$

OP= monotonia del prodotto: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} ; x \leq y \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

- **ASSIOMA DI COMPLETEZZA:**

Comunque dati due sottoinsieme di \mathbb{R} , A e B, soddisfacenti la seguente proprietà:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$$

esiste un elemento separatore, ovvero un numero reale L tale che:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq L \leq y$$

- Legge di annullamento del prodotto: Se $a \cdot b = 0$ allora $a = 0$ o $b = 0$ (0 è l'elemento assorbente del prodotto)

Il principio di Induzione

Sia $P(n)$ un predicato definito su \mathbb{N} . Supponiamo che

1) $P(0)$ è vero.

2) Se $P(n)$ è vero allora anche $P(n+1)$ è vero.

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ è vero.

I FONDAMENTI DELL'ANALISI INFINITESIMALE

La matematica propone modelli per descrivere la realtà, ma ci sono calcoli o formule che in alcuni casi devono servirsi dei cosiddetti numeri "ideali". I numeri Ideali rappresentano un'espansione degli insiemi infiniti e nel caso particolare ampliano l'insieme \mathbb{R} all'insieme \mathbb{R}^* (numeri iperreali). I numeri ideali possono servire per descrivere esperienze come "il calcolo del segmento di parabola" o "la velocità istantanea" in un punto.

Il concetto di velocità istantanea

Una delle contraddizioni a cui si giunge studiando i problemi in modo classico è il calcolo della velocità istantanea, ovvero la velocità in un punto; poiché la velocità è sempre definita come

$$V(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = V_0 - \frac{1}{2}g(t_2 + t_1)$$

velocità media in un intervallo $[t_1, t_2]$, ottengo che

,quindi per "t" ($=t_1=t_2$) non ottengo soluzioni valide, ma introducendo gli infinitesimi e scrivendo $t_2 - t_1 = 0 + \delta$ e $t_2 + t_1 = 2t$ ottengo, sostituendo nella formula,

$V(t_1, t_2) = V_0 - g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\delta)$, possiamo assumere δ un numero trascurabile e quindi

la velocità istantanea è $V_i = V_0 - g \cdot t$

L'insieme dei numeri iperreali e il concetto di traccia di un numero iperreale

L'insieme dei numeri iperreali è un'estensione dei numeri reali e contiene numeri ideali, e si indica con R^* .

Gli assiomi principali sono:

- i) R^* è un campo ordinato;
- ii) $R \subset R^*$
- iii) esiste un numero $\alpha_0 \in R^*$ tale che $\forall x \in R, \alpha_0 > x$
- iv) Principio di Rappresentazione:
- v) Principio di Sostituzione:
- vi) Principio di Selezione:

Definizioni dei numeri:

- Illimitato (o infinito): $x \in R^*, \forall k \in N, |x| > k$
- Limitato: $x \in R^*, \forall k \in N, |x| < k$
- Infinitesimo: $x \in R^*, \forall k \in N, |x| < 1/k$
- Apprezzabile: se è limitato ma non infinitesimo, $x \in R^*, \forall k \in N, 1/k < |x| < k$

Ordine di un numero iperreale

- **Teorema 2.4.1.**

Dato un numero iperreale limitato $\xi \in R^*$, esiste sempre un unico numero reale x_0 infinitamente vicino ad ξ . L'unico numero reale $x_0 \sim \xi$ si chiama parte standard di ξ . In simboli si scrive $x = st(\xi)$.

- **Teorema 2.4.3.**

Possiamo introdurre una nuova funzione da R^* (numeri iperreali illimitati) a R^\wedge (tra $-\infty$ e $+\infty$):

$$tr: R^* \rightarrow R^\wedge$$

detta *traccia*, che estende la funzione parte standard ai numeri illimitati:

$$tr(\xi) = \begin{cases} st(\xi) & \text{se } \xi \text{ è limitato} \\ +\infty & \text{se } \xi \text{ è un illimitato positivo} \\ -\infty & \text{se } \xi \text{ è un illimitato negativo} \end{cases}$$

- **Teorema 2.7.3.**

Se $\varphi(\alpha_0) = \psi(\alpha_0)$, allora $(f \bullet \varphi)(\alpha_0) = (f \bullet \psi)(\alpha_0)$.

CAPITOLI RESTANTI

- **Concetto di Continuità.**

Data una funzione

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

si dice continua in un punto $x_0 \in A$ se per ogni $\xi \in A^*$, si ha che

$$\xi \sim x_0 \Rightarrow f(\xi) \sim f(x_0)$$

- **Definizione di Weierstrass.**

Sia data una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *massimo assoluto* (o semplicemente massimo) di f se

$$\forall x \in A : f(x_0) \geq f(x)$$

Il numero $M = f(x_0)$ si chiama valore massimo di f (o anche “massimo di f ”). Un numero $L \in \mathbb{R}^\wedge$ si dice estremo superiore di f se è l'estremo superiore dell'insieme $f(A)^*$ ovvero se soddisfa le seguenti proprietà:

$$0 \quad \forall \xi \in A^*, f(\xi) \leq L,$$

$$0 \quad \exists \xi \in A^*, \text{tr}[f(\xi)] = L.$$

Analogamente si definisce il minimo e l'estremo inferiore.

- **Teorema di Weierstrass.**

Una funzione continua $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ha massimo e minimo (assoluti).

- **Teorema di Bolzano e sue conseguenze.**

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che assume valore di segno opposto in a e b . Allora f ha almeno uno zero in (a,b) .

- **Uniformemente continuità.**

Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) si dice *uniformemente continua* in A , se presi $\xi, \zeta \in A^*$ con $\xi \sim \zeta$, si ha che:

$$f(\xi) \sim f(\zeta)$$

- **Teorema di Cantor.**

Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, allora essa è uniformemente continua.

- **Il concetto di Limite.**

Sia data una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; si dice che il limite di f per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}^\wedge$ è $l \in \mathbb{R}^\wedge$ se

$$\forall \xi \in A^* - \{x_0\}, \text{tr}(\xi) = x_0 \Rightarrow \text{tr}[f(\xi)] = l$$

In simboli si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

- **Definizione della Derivata.**

Sia data una funzione $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ e si consideri un punto $x_0 \in (a,b)$. Si dice che è derivabile in x_0 se $\forall \varepsilon \sim 0$ ($\varepsilon \neq 0$), il numero

$$\text{tr} \left(\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right) = f'(x_0)$$

è ben definito (cioè non è $\pm\infty$ e non dipende da ε).

- **Teorema di Fermat.**

Sia data una funzione derivabile $f : (a,b) \rightarrow \mathbf{R}$.

Allora, se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale per f , si ha che $f'(x_0) = 0$.

- **Teorema di Lagrange.**

Sia data una funzione continua

$$f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$$

derivabile in tutti i punti dell'intervallo aperto (a,b) . Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- **Teorema di Rolle.**

Sia data una funzione continua

$$f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$$

derivabile in tutti i punti dell'intervallo aperto (a,b) . Allora se

$$f(a) = f(b),$$

esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f'(x_0) = 0$$

- **Teorema di Cauchy.**

Siano date due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) . Supponiamo che g' sia diversa da zero in tutto (a, b) . Allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

- **Teorema 4.7.1.**

Sia data una funzione derivabile definita in un intervallo. Allora se la sua derivata è nulla essa è costante.

- **Teorema 4.7.2.**

Sia data una funzione continua $f : [x_0, a) \rightarrow \mathbf{R}$, derivabile in (x_0, a) . Allora se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = l$$

la funzione f ha la derivata destra nel punto x_0 ed inoltre $D^+ f(x_0) = l$.

- **Definizione dell'Integrale.**

Si chiama δ_0 -integrale di una funzione $f : (a,b) \rightarrow \mathbf{R}$, il numero

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \left[\delta_0 \sum_{k=\lceil a/\delta_0 \rceil}^{\lfloor b/\delta_0 \rfloor} f(k\delta_0) \right]$$

- **Teorema fondamentale del calcolo Integrale.**

Sia data una funzione continua $F : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ dotata di derivata continua. Allora si ha che:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x) dx &= \text{tr} \left[\delta_0 \sum_{k=k_0}^{k_1} F'(x_k) \right] = \text{tr} \left[\delta_0 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} F'(x_k) \right] = \text{tr} \left[\delta_0 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \left(\frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{\delta_0} + \eta_k \right) \right] = \\ &= \text{tr} \left[\sum_{k=k_0}^{k_1-1} F(x_{k+1}) - \sum_{k=k_0}^{k_1-1} F(x_k) \right] + \text{tr} \left[\delta_0 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \eta_k \right] = \text{tr} \left[\sum_{k=k_0+1}^{k_1} F(x_k) - \sum_{k=k_0}^{k_1-1} F(x_k) \right] + \text{tr} \left[\delta_0 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \eta_k \right] = \\ &= \text{tr} \left[F(x_{k_1}) + \sum_{k=k_0+1}^{k_1-1} F(x_k) - F(x_{k_0}) - \sum_{k=k_0+1}^{k_1-1} F(x_k) \right] + \text{tr} \left[\delta_0 \sum_{k=k_0+1}^{k_1-1} \eta_k \right] = \text{tr} [F(x_{k_1}) - F(x_{k_0})] + \text{tr} \left[\delta_0 \sum_{k=k_0+1}^{k_1-1} \eta_k \right] = \end{aligned}$$

poiché η è infinitesimo, risulta che, $\quad = F(b) - F(a)$

- **Teorema della Primitiva.**

Il problema,

$$\begin{cases} (a) & u'(x) = f(x) \\ (b) & u(x_0) = c \end{cases}$$

ha un'unica soluzione u ; essa è data dalla formula

$$u(x) = c + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

- **Teorema 6.3.2.**

Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ (ove I è un intervallo) una funzione derivabile. Allora f è crescente (rispettivamente decrescente) se e soltanto se,

$$\forall x \in I, f'(x) \geq 0, \quad \text{rispettivamente } \forall x \in I, f'(x) \leq 0$$

- **Teorema 6.3.3.**

Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ (ove I è un intervallo) una funzione derivabile. Allora f è strettamente crescente (rispettivamente decrescente) se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (rispettivamente $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$)
- non esiste alcun intervallo J contenuto nell'insieme critico

$$W = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

- **Teorema 6.3.4.**

Sia f una funzione monotona crescente definita in $(a,b) \subset \mathbf{R}$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow b+} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$$

• **Teorema 6.6.3.**

Sia data una funzione $f \in C^1(I)$ e sia $x_0 \in I$ un punto critico isolato (cioè un punto critico che non è infinitamente vicino ad altri punti critici o singolari). Allora si ha una delle seguenti possibilità:

- (i) x_0 è un punto di massimo stretto.
- (ii) x_0 è un punto di minimo stretto.
- (iii) x_0 è un punto di flesso orizzontale.

• **Teorema 6.7.3.**

Sia f una funzione definita in un intervallo aperto I . Allora

- o (i) se $f \in C^1$, f è convessa se e soltanto se f' è crescente.
- o (ii) se $f \in C^2$, f è convessa se e soltanto se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

• **Regole di L'Hôpital.**

Prima Regola (0/0):

Siano date due funzioni continue in $[x_0, b)$ e derivabili in (x_0, b) . Supponiamo che si abbia $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e che g' assuma lo stesso segno in tutto (x, b) .

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \hat{\mathbb{R}}$, allora esiste anche il limite, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è "l".

Prima Regola (∞/∞):

Siano date due funzioni continue in $[x_0, b)$ e derivabili in (x_0, b) . Supponiamo che si abbia $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \pm\infty$ e che g' assuma lo stesso segno in tutto (x, b) .

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \hat{\mathbb{R}}$, allora esiste anche il limite, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è "l".

Seconda Regola (0/0):

Siano date due funzioni, f e g , continue in $(a, +\infty)$ ed ivi derivabili. Supponiamo che si abbia $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ e che g' assuma lo stesso segno in tutto $(a, +\infty)$.

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \hat{\mathbb{R}}$, allora esiste anche il limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è "l".

Seconda Regola (∞/∞):

Siano date due funzioni, f e g , continue in $(a, +\infty)$ ed ivi derivabili. Supponiamo che si abbia $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty$ e che g' assuma lo stesso segno in tutto $(a, +\infty)$.

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \hat{\mathbb{R}}$, allora esiste anche il limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è "l".

• ASINTOTI.

Gli asintoti di una funzione possono essere verticali, orizzontali ed obliqui; la funzione non tocca mai queste rette ma "vi tende", in questo modo possiamo capire il comportamento della funzione in punti particolari della funzione e all'infinito.

Se il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$, in questo caso si dice che f ha un asintoto verticale in x_0 .

Per lo studio dell'asintoto orizzontale od obliquo bisogna dare le seguenti definizioni.

Definizione 6.9.1. Sia data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ove I è un intervallo illimitato superiormente (risp. inferiormente). Si dice che la retta di equazione

$$y = ax + b$$

è un asintoto destro (risp. sinistro) per f se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (\text{risp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0)$$

Se si ha $a=0$, si dice che la retta y è un asintoto orizzontale, altrimenti si dice che è un asintoto obliquo.

Teorema 6.9.2. Le seguenti proposizioni valgono per un asintoto orizzontale:

- i. la retta $y = b$ è un asintoto orizzontale destro (risp. sinistro);
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (risp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$).

Teorema 6.9.3. Le seguenti proposizioni valgono per un asintoto obliquo.

- i. la retta $y = ax + b$ è un asintoto obliquo destro (risp. sinistro);
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = a \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ (risp. per $-\infty$).

• Studio di Funzione.

- i. Determinazione del dominio "naturale" della funzione assegnata (che in genere viene chiamato anche campo di esistenza), cioè dell'insieme "più grande" sul quale sono definite quelle espressioni analitiche che compaiono nella funzione.
- ii. Determinazione di eventuali simmetrie: si verifichi se la funzione è pari ($f(-x)=f(x)$) o dispari ($f(-x)=-f(x)$). In questo caso sarà sufficiente studiare la funzione per $x \geq 0$ in quanto il suo comportamento per $x < 0$ verrà determinato dalla simmetria.
- iii. Determinazione del comportamento asintotico della funzione; se il dominio D della funzione è illimitato superiormente e/o inferiormente si calcolino i limiti della nostra funzione per $x \rightarrow \pm \infty$. Qualora esistano, si determinino gli eventuali asintoti orizzontali e/o obliqui.
- iv. Determinazione dei punti di intersezione del grafico con gli assi delle coordinate. L'intersezione con y si ottiene valutando $f(0)$, mentre con l'asse x ponendo $f(x)=0$.
- v. Determinazione dei punti singolari e loro classificazione. Per fare ciò si devono calcolare i limiti che la funzione presenta nei punti ove non è definita o è discontinua. Inoltre si calcoli $f'(x)$, si determinino i punti ove f' non è definita o è discontinua e si calcolino i relativi limiti.
- vi. Determinazione dei punti critici. Si studia l'equazione $f'(x) = 0$. Prima di classificare i punti critici può essere conveniente passare al punto successivo.
- vii. Studio della crescita e della decrescita, valutando il segno che la derivata prima assume tra un punto critico (o singolare) e l'altro.
- viii. Si concluda la classificazione dei punti critici sfruttando le informazioni ottenute precedentemente. A questo punto si può anche verificare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui.
- ix. Studio della derivata seconda, e determinazione dei punti di flesso e degli intervalli ove f è concava (\cap) o convessa (\cup).
- x. Disegnare il grafico della funzione in base ai ragionamenti fatti su essa.

- **Il Logaritmo.**

Definizione 7.1.1. Per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, si pone

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Il numero $\log x$ si chiama logaritmo naturale (o semplicemente logaritmo) di x . La funzione $x \rightarrow \log x$ si chiama funzione logaritmo. Esaminiamo adesso alcune delle più importanti proprietà del logaritmo:

- i. $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
- ii. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \log(xy) = \log x + \log y$
- iii. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{Z}, \log x^n = n \log x$
- iv. $D \log x = 1/x$
- v. Il logaritmo è una funzione strettamente crescente e strettamente concava.

- **La funzione esponenziale.**

Per il teorema 6.3.2 la funzione logaritmo è una funzione invertibile. La sua funzione inversa è definita su \mathbb{R} ed assume valori su \mathbb{R}^+ ; tale funzione si chiama esponenziale ed in simboli,

$$\exp x$$

Di seguito sono elencate le sue proprietà:

- i. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- ii. $\exp 0 = 1$
- iii. $\exp(x + y) = \exp x * \exp y$
- iv. $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- v. $D \exp x = \exp x$
- vi. $\exp x$ non ha punti singolari, è strettamente crescente e strettamente convessa.
- vii. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega, \exp x = \text{tr} (1 + x/\omega)^\omega$

- **La costante di Nepero "e".**

La Costante di Nepero "e", insieme a π , è la costante più importante dell'Analisi Matematica; è un numero irrazionale il cui valore approssimato a meno di un centesimo è 2,71.

- **Definizione di Serie.**

Si dice che la serie è regolare se il numero

$$S := \text{tr} \left[\sum_{K=0}^{\omega} a_K \right]$$

non dipende dalla scelta di $\omega \in \Omega$; se $S \in \mathbf{R}$, si dice che la serie è convergente e il numero S si chiama somma della serie; se $S = \pm\infty$ si dice che la serie è divergente. Una serie che non è regolare si dice indefinita.

Alcune Proprietà:

o Due serie

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_K \text{ e } \sum_{K=0}^{\infty} b_K$$

si dicono definitivamente uguali se differiscono solo per un numero finito di termini ovvero se esistono due numeri $k_0 \in \mathbf{N}$ e $q \geq -k_0$ tali che $\forall k \geq k_0, a_k = b_{k+q}$.

o Se la serie è regolare, allora $\sum_{K=0}^{\infty} a_K = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$.

o Se la serie è indefinita allora il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ non esiste.

- **Il criterio di convergenza di Cauchy.**

Successione di Cauchy. Una successione a valori reali $\{a_n\}$ si dice successione di Cauchy se

Per le successioni: Una successione a valori reali $\{a_k\}$ è convergente se è una successione di Cauchy.

Per le serie: Una serie $\sum_{K=0}^{\infty} a_K$ è convergente se e soltanto se $\forall \omega, \tau \in \Omega, \sum_{K=\omega}^{\tau} a_K \approx 0$.

- **Il Criterio di Convergenza monotona e la convergenza assoluta.**

Teorema 8.4.1. Criterio di convergenza monotona per le successioni: Una successione monotona crescente $\{a_n\}$ (cioè tale che $n < m \rightarrow a_n < a_m$) è sempre regolare (cioè è convergente o diverge a $+\infty$) e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in N} \{a_n\}$$

Analogamente, se $\{a_n\}$ è una successione decrescente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in N} \{a_n\}$$

Definizione 8.4.2. - Si dice che la serie $\sum_{K=0}^{\infty} a_K$ converge assolutamente se la serie $\sum_{K=0}^{\infty} |a_K|$ è una serie convergente.

Teorema 8.4.3. - Una serie assolutamente convergente è convergente.

Teorema 8.4.3 - Criterio di convergenza monotona per le serie: La serie $\sum_{K=0}^{\infty} a_K$ converge

assolutamente se e soltanto se $\exists \omega \in \Omega, \sum_{K=0}^{\infty} |a_K| < +\infty$, se invece $\exists \omega \in \Omega,$

$\sum_{K=0}^{\infty} |a_K| = +\infty$ allora la serie non converge assolutamente.

- **Criteri del Confronto.**

Date due serie: $\sum_{K=0}^{\infty} a_K, a_K > 0$ (1) $\sum_{K=0}^{\infty} b_K, b_K > 0$ (2)

Primo Criterio del Confronto: Siano assegnate due serie a termini positivi (1) e (2). Supponiamo che esista $M \in \mathbf{R}$,

$$\forall \omega \in \Omega, a_{\omega} \leq M b_{\omega}$$

Allora se la serie (2) converge, anche la (1) converge; se la serie (1) diverge anche la serie (2) diverge.

Secondo Criterio del Confronto: Siano assegnate le due serie a termini positivi (1) e (2). Supponiamo che

$$\forall \omega \in \Omega, a_{\omega} \approx b_{\omega}$$

Allora la serie (2) converge se e soltanto se la (1) converge.

- **Criterio dell'Integrale.**

Si consideri la serie (1) e supponiamo che esista una funzione continua $f : (c, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, che soddisfa le seguenti ipotesi:

- i. f è decrescente,
- ii. $\forall n \in \mathbf{N}, f(n) = a_n$

Allora la serie (1) converge se e soltanto se

$$\forall \omega, \tau \in \Omega, \int_{\omega}^{\tau} f(x) dx \sim 0$$

Esempio Importantissimo

La seguente serie $\sum_{K=1}^{\omega} \frac{1}{K^p}$, per $p=1$ si chiama serie armonica. per $p \neq 1$ si chiama serie armonica generalizzata. Per $p \leq 1$ la serie diverge, mentre per $p > 1$ la serie converge.

- **Criterio del Logaritmo.**

Se $\forall \omega \in \Omega, \exists p \in \mathbf{R}$ $\frac{\log a_{\omega}}{\log \omega} \leq -p \leq -1$ la serie converge, se invece $\frac{\log a_{\omega}}{\log \omega} > -1$ la serie diverge.

- **Criterio della Radice.**

Se $\forall \omega \in \Omega, \sqrt[\omega]{a_{\omega}} \leq l \leq 1$ la serie converge. Se invece $\exists \omega \in \Omega, \sqrt[\omega]{a_{\omega}} \geq 1$ la serie diverge.

- **Criterio del Rapporto.**

Se $\forall \omega \in \Omega, \text{tr} \left(\frac{a_{\omega+1}}{a_{\omega}} \right) \leq l \leq 1$ la serie converge.

Se invece $\forall \omega \in \Omega, \text{tr} \left(\frac{a_{\omega+1}}{a_{\omega}} \right) \geq 1$ la serie diverge.

- **Serie a segni alterni.**

Una serie a segni alterni si definisce come segue

$$\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K a_K; a_K > 0$$

Se si ha che $a_{k+1} < a_k$, allora essa converge se e soltanto se $\forall \omega \in \Omega, a_{\omega} \sim 0$.

- **Definizione dei numeri complessi.**

I numeri complessi costituiscono un corpo numerico basato sull'esistenza un nuovo numero, il "i" il quale è caratterizzato dalla proprietà

$$i^2 = -1$$

Un numero complesso viene rappresentato nella forma

$$z = x + iy$$

dove x è la parte REALE e y la parte IMMAGINARIA,

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad \operatorname{Im}(z) = y$$

Vediamo come sviluppare addizione e moltiplicazione di numeri immaginari

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Valgono le seguenti proprietà per i numeri complessi, dato $z = x + iy$,

- i. $\bar{z} = x - iy$, che si chiama "coniugato di z"
- ii. $\overline{\bar{z}} = z$
- iii. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- iv. $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- v. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- vi. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- vii. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- viii. $|z| = \sqrt{\bar{z} \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, dove $|z|$ si chiama modulo

- **Forma Trigonometrica di un numero complesso**

Un numero complesso può essere rappresentato da un punto nel piano delle coordinate, torna utile però rappresentarlo anche tramite le coordinate polari (r, φ) , quindi:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad \text{pertanto } z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Si può notare che $r = |z|$ e quindi chiamato $\rho = |z|$ si può scrivere:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \cos \varphi = x/\rho \quad \sin \varphi = y/\rho$$

Importante è la seguente formula: $z^n = r^n \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$

- **Formula di Eulero.**

Poiché dato un numero complesso z si pone:

$$e^z = \operatorname{tr}[(1 + \delta_0 z)^{\alpha_0}]$$

Vale la seguente formula, conosciuta come Formula di Eulero:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}$$

Curiosità

I cinque numeri più importanti della matematica indubbiamente sono i seguenti: 0, 1, π , e, i. Se nella formula di Eulero poniamo $x=0$ ed $y=\pi$, si ottiene: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Pertanto abbiamo una "formula magica" che riunisce le nostre 5 costanti.

- **Calcolo delle radici n-esime di un numero complesso.**

Le radici n-esime di un numero complesso ω , sono per definizione i numeri complessi z che risolvono la seguente equazione: $z^n = \omega$,

Se si pone $z = \rho e^{i\varphi}$ e $\omega = R e^{i\Theta}$

L'equazione proposta assume la forma $\rho^n e^{in\varphi} = R e^{i\Theta}$

Quindi il problema di trovare z si riduce a risolvere il seguente sistema

$$\rho^n = R;$$

$$n\varphi = \Theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z};$$

Quindi la soluzione, per il teorema 9.6.1., è $z = \rho e^{i\varphi}$.

- **Calcolo del logaritmo di un numero complesso.**

Il logaritmo di un numero complesso ω è l'insieme di tutte le soluzioni complesse z dell'equazione $e^z = \omega$, ovvero $z = \log \omega$

Quindi $z = x + iy$ e $\omega = \rho e^{i\varphi}$

Il problema si riduce a trovare i numeri reali x e y tali che

$$e^x = \rho \quad (x = \log \rho)$$

$$e^{iy} = e^{i\varphi} \quad (y = \varphi + 2k\pi)$$

- **Teorema Fondamentale dell'Algebra.**

L'equazione algebrica $z^n - a_0 = 0$ nel campo complesso ha esattamente n soluzioni, questo si può generalizzare ad una qualsiasi equazione algebrica nel campo complesso di grado n ,

$$P_n(z) = 0$$

dove P_n è un polinomio di grado n . Una soluzione si chiama anche radice del polinomio $P_n(z)$.

Teorema della divisione tra polinomi. Dati due polinomi $P_n(z)$ e $D_m(z)$ di grado n ed m rispettivamente (D_m non-nullo), allora esistono due polinomi $Q(z)$ e $R(z)$ tali che

$$P_n(z) = Q(z)D_m(z) + R(z) \quad \text{dove il grado di } R(z) < m$$

Tali polinomi sono determinati univocamente e sono chiamati polinomio quoziente e polinomio resto rispettivamente. Inoltre se $n \geq m$, il grado di $Q(z)$ è $n-m$.

Le due seguenti asserzioni sono equivalenti:

i. $P_n(z)$ è divisibile per il polinomio di primo grado $z-z_0$.

ii. z_0 è una soluzione di $P_n(z)$.

Si dice che z_0 è una soluzione dell'equazione $P_n(z)=0$ di molteplicità μ , se il polinomio $P_n(z)$ è divisibile per $(z-z_0)^\mu$.

Teorema fondamentale dell'Algebra. Se $n \geq 1$, l'equazione $P_n(z)$ ha almeno una soluzione.

Teorema di scomposizione dei polinomi. Ogni polinomio di grado n è scomponibile nel prodotto di n polinomi di primo grado; più precisamente, se

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

esistono n numeri complessi z_1, z_2, \dots, z_n tali che

$$P_n(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$$

Teorema di D'Alembert. L'equazione $P_n(z) = 0$ ha esattamente n soluzioni se vengono contate con la loro molteplicità.

- **Derivata e Integrale di funzioni a valori complessi**

Data $f(t) = u(t) + i v(t)$, si può calcolarne la derivata e l'integrale;

DERIVATA. $f'(t) = u'(t) + i v'(t)$

INTEGRALE. $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$