

# CALCOLO COMBINATORIO

- Disposizioni semplici di n oggetti

**DEFINIZIONE** – Dati  $n$  elementi distinti, si chiama “disposizione semplice” degli  $n$  elementi, presi a  $k$  a  $k$ , ( $k \leq n$ ), o della classe  $k$ , in gruppo ordinato di  $k$  degli  $n$  elementi.

*Due di tali disposizioni si ritengono diverse quando differiscono per almeno un elemento, oppure l'ordine con cui gli elementi si presentano.*

**TEOREMA** – Il numero di disposizioni semplici di  $n$  elementi (distinti), della classe  $k$ , è uguale al prodotto di  $k$  numeri interi, decrescenti, dei quali il primo è  $n$ ; cioè:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

- Disposizioni con ripetizione

**DEFINIZIONE** – Dati  $n$  elementi distinti, si dice “disposizione con ripetizione” degli  $n$  elementi a  $k$  a  $k$  (con  $k$  numero intero qualunque) un gruppo ordinato formato con  $k$  degli  $n$  elementi, potendo uno stesso elemento figurare nel gruppo fino a  $k$  volte.

*Due di tali disposizioni si ritengono diverse quando esistono due elementi distinti che occupano nelle disposizioni il medesimo posto.*

**TEOREMA** – Il numero delle disposizioni con ripetizione (o complete) di  $n$  elementi distinti della classe  $k$  è uguale alla potenza di base  $n$  ed esponente  $k$ ; cioè:

$$D_{n,k}^r = n^k$$

- Permutazioni semplici

**DEFINIZIONE** – Si chiamano “permutazioni semplici” di  $n$  elementi distinti le disposizioni semplici degli  $n$  elementi, presi ad  $n$  ad  $n$ .

*Le permutazioni di  $n$  elementi distinti sono tutti i gruppi di  $n$  elementi che si possono formare con gli elementi dati, e che differiscono tra loro soltanto per l'ordine degli elementi.*

$P_n = D_{n,n}$  e quindi, cioè il numero delle permutazioni di  $n$  elementi distinti è uguale al prodotto dei primi  $n$  numeri naturali (diversi da zero).

**DEFINIZIONE** – Se  $k$  è un numero naturale maggiore di 1, si chiama fattoriale del numero  $k$ , e si indica con  $k!$ , il prodotto dei primi  $k$  numeri naturali, cioè:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$$

Da cui si ha che  $P_n = n!$

- Combinazioni semplici

**DEFINIZIONE** – Dati  $n$  elementi distinti, si chiama “combinazione semplice” degli  $n$  elementi, presi a  $k$  a  $k$ , o della classe  $k$ , ( $k \leq n$ ), un qualunque gruppo formato da  $k$  degli  $n$  elementi dati.

Due di tali combinazioni si ritengono distinte quando differiscono tra loro per almeno un elemento.

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Questa formula dà il numero delle combinazioni semplici di  $n$  elementi, presi a  $k$  a  $k$ . L'ultimo simbolo si legge “ $n$  su  $k$ ” o “ $n$  sopra  $k$ ” in cui,  $n$  si dice ordine e  $k$  si dice classe (o indice).

In particolare:  $\binom{n}{1} = n$  e  $\binom{n}{n} = 1$

- Coefficienti binomiali e loro proprietà

Il simbolo  $\binom{n}{k}$  si chiama **coefficiente binomiale** (o simbolo combinatorio), gode di molte proprietà:

1)  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  da cui si deduce che  $\binom{n}{0} = 1$

2)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3) Formula di Stifel:  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$  da cui segue:  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

4) Proprietà di ricorrenza:  $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$

5)  $\binom{m+n}{k} = \binom{m}{k} \binom{n}{0} + \binom{m}{k-1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{m}{k-r} \binom{n}{r} + \dots + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \binom{m}{0} \binom{n}{k}$

- Formula del binomio di Newton

**FORMULA DI TARTAGLIA-NEWTON** – Qualunque siano i due numeri  $a$  e  $b$  e l'intero positivo  $n$ , si ha:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$